

حل تمرینات ریاضی هشتم

فصل دوم :

عددهای اول

تهریه کننده : مهندس حسین آبادی

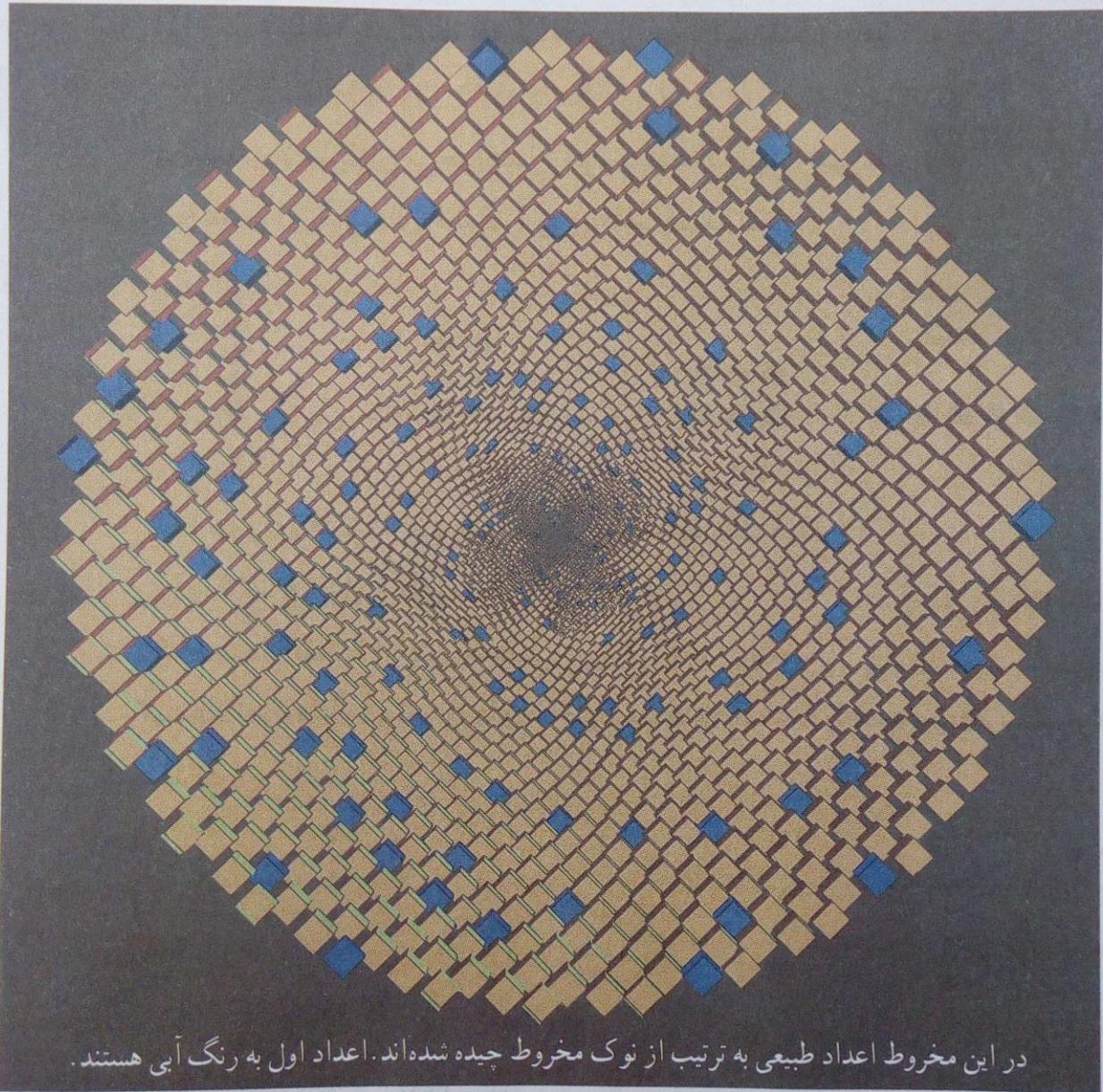
www.darsdarkhane.ir ارائه دهنده : سایت درس در خانه

برای هماهنگی جهت کلاس خصوصی درس ریاضی در مشهد با قالب های:

- تقویت ریاضی پایه
- رفع اشکال مسائل درسی
- آموزش کامل مفاهیم کتاب
- آموزش چگونگی حل تمرین ها
- آمادگی برای ورود به مدارس نمونه و تیزهوشان

با شماره تلفن ۰۹۳۵ ۱۴۹ ۲۳۶۸ تماس حاصل فرمایید.

عددهای اول



شمارنده‌های اول یک عدد مانند ماده اولیه کارخانه عددسازی هستند. همه عددهای طبیعی بزرگ‌تر از یک و غیر اول را می‌توانیم با ضرب شمارنده‌های اول به دست آوریم. امروزه از عددهای اول، که تجزیه و شکسته نمی‌شوند برای رمزنگاری و رمزگشایی استفاده می‌شود.

یادآوری عددهای اول

فعالیت



۵-

۱- می خواهیم ۱۹ نفر از دانش آموزان را برای کارهای مختلف به گروه های

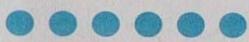
تقسیم کنیم. آیا می توانیم این تعداد را به گروه های مساوی تقسیم کنیم؟ $\frac{19}{7}$ گروه بیک نفری

اگر تعداد دانش آموزان ۷ نفر باشد، چه گروه هایی را می توانیم تشکیل دهیم؟ همه حالت های ممکن را بنویسید. $\frac{7}{7}$ گروه بیک نفری - $\frac{7}{1}$ گروه هفت نفری

اگر تعداد آنها ۱۵ نفر باشد، چه گروه هایی را می توانیم تشکیل دهیم؟ $\frac{15}{5}$ گروه بیک نفری - $\frac{15}{3}$ گروه پنج نفری - $\frac{15}{1}$ گروه سیزده نفری



۲- تعدادی از سربازان می خواهند ریزه بروند. فرمانده آنها آرایش های مستطیلی مختلف برای گروه های ۶ نفره را روی کاغذ کشیده است.



$$1 \times 6$$



$$2 \times 3$$



$$3 \times 2$$



$$6 \times 1$$

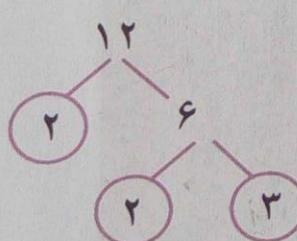
شما هم برای ۸ نفر، آرایش های مستطیلی مختلف رسم کنید.

برای ۵ نفر هم آرایش های ممکن را رسم کنید.

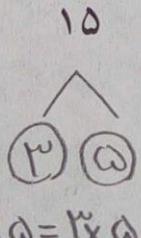
کدام عددها فقط ۲ آرایش مستطیلی دارند؟ اعداد اول

۳- مانند نمونه ها با رسم نمودارهای درختی، عددهای داده شده را به صورت ضرب شمارنده های

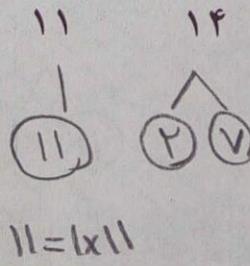
اول بنویسید (تجزیه کنید).



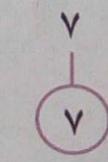
$$12 = 2 \times 2 \times 3$$



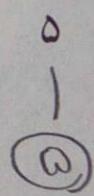
$$15 = 3 \times 5$$



$$11 = 1 \times 11$$



$$7 = 1 \times 7$$



$$5 = 1 \times 5$$

هر عدد طبیعی و بزرگ تر از یک، که هیچ شمارنده طبیعی به جز یک و خودش نداشته باشد، عدد اول نامیده می شود.

کار در کلاس



اگر بتوانیم عددی طبیعی را به صورت ضرب دو عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک بنویسیم، عدد مورد نظر، اول نخواهد بود و به چنین عددی، **عدد مرکب** می‌گویند؛ برای مثال؛ ۲۴ عددی مرکب است؛ چون: $24 = 6 \times 4$

همه عدهای مرکب بین ۱۵ و ۳۰ را به صورت ضرب دو عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک بنویسید.

$14 = 2 \times 7$	$22 = 2 \times 11$	$28 = 4 \times 7$
$20 = 4 \times 5$	$24 = 3 \times 8$	$26 = 3 \times 6$
$25 = 5 \times 5$	$27 = 3 \times 9$	

فعالیت



۵-

۱- عدهای طبیعی از ۱ تا ۲۰ را بنویسید و دور عدهای اول خط بکشید. آیا

- عدد ۱ اول است؟ چرا؟
- آیا عدد ۱ مرکب است؟ چرا؟
- | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ۸ | ۹ | ۱۰ | ۱۱ | ۱۲ | ۱۳ | ۱۴ | ۱۵ | ۱۶ | ۱۷ | ۱۸ | ۱۹ | ۲۰ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|

عدد یک نه اول است و نه مرکب

۲- با توجه به سؤال بالا، عدهای طبیعی را به سه دسته تقسیم کنید و ویژگی‌های هر کدام را بنویسید.

{
عدد یک
اعداد اول
اعداد مرکب

۳- مضرب‌های طبیعی عدد ۲ در زیر نوشته شده است. در صورت امکان، آنها را مانند نمونه به صورت ضرب دو عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ بنویسید.

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$2 \times 2 \quad 2 \times 3 \quad 2 \times 4 \quad 2 \times 5 \quad 2 \times 6 \quad 2 \times 7$$

به همین ترتیب، مضرب‌های طبیعی عدهای ۳ و ۴ را بنویسید و در صورت امکان آنها را به صورت ضرب دو عدد طبیعی و بزرگ‌تر از ۱ بنویسید.

۰۰۰، ۱۵، ۱۲، ۹، ۶، ۳: مضرب‌های طبیعی عدد ۳

۰۰۰، ۲۵، ۲۰، ۱۵، ۱۲، ۸، ۴: مضرب‌های طبیعی عدد ۴

۴- با توجه به سؤال بالا، آیا می‌توانیم بگوییم که همه مضرب‌های یک عدد طبیعی مرکب‌اند؟ چرا؟

عدد ۱ نه اول است نه مرکب؛ به این ترتیب، عدهای طبیعی را می‌توان به سه بخش تقسیم کرد:

عدهای اول، عدهای مرکب و عدد یک

جواب ۴: الیک عدد طبیعی اول باشد، تنها یک مضرب اول دارد که خود عدد است. اما

آخر عدد مرکب باشد همه مضرب‌های آن مرکب‌هستند.

کار در کلاس



۱- کدام عددهای طبیعی را می‌شناسید که همه مضرب‌هایشان عددهای مرکب باشند؟

عددهای طبیعی مرکب

۲- عدد ۱۷ چند مضرب دارد؟ بی‌شمار

۳- اگر a یک عدد اول باشد، آیا همه مضرب‌هایش مرکب‌اند؟ خیر - اولین مضرب a نه برابر با a می‌باشد، اول است. اما سایر مضرب‌های a همگی مرکب هستند.

فعالیت



۵-

۱- ب.م.م جفت عددهای داده شده را بنویسید.

$$(15, 6) = 3$$

$$(2, 8) = 2$$

$$(3, 9) = 3$$

$$(1, 4) = 1$$

$$(18, 12) = 6$$

$$(5, 12) = 1$$

$$(15, 4) = 1$$

$$(3, 5) = 1$$

$$(24, 25) = 1$$

$$(18, 25) = 1$$

$$(7, 8) = 1$$

$$(3, 3) = 3$$

اگر ب.م.م (بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه [شمارنده] مشترک) دو عدد برابر یک باشد، می‌گوییم آن دو عدد نسبت به هم اول هستند؛ برای مثال، عددهای ۸ و ۹ هر دو مرکب‌اند اما چون $1 = (8, 9)$ می‌گوییم این دو عدد نسبت به هم اول‌اند.

۲- دو عدد اول متفاوت انتخاب کنید و ب.م.م آنها را بنویسید.

آیا می‌توان گفت هر دو عدد اول نسبت به هم اول‌اند؛ چرا؟ بله، چون ب.م.م آن‌ها ۱ است

۳- یک عدد اول و یک عدد مرکب مثال بزنید که نسبت به هم اول باشد. $1 = (12, 5)$

۴- دو عدد مرکب مثال بزنید که نسبت به هم اول باشد. $1 = (35, 4)$

۵- آیا دو عدد طبیعی متولی نسبت به هم اول می‌شوند؟ بله

۶- اگر دو عدد نسبت به هم اول باشند، ک.م.م آنها چگونه به دست می‌آید؟

ک.م.م آن‌ها برابر با حاصل ضرب آن دو است.

تمرین



۳۵ و ۱۵ و ۹ و ۵

۱- برای تساوی رو به رو، چهار پاسخ مختلف به دست آورید. ۱ = (۴ و □)

۲- عدد های اول بین دو عدد ۴۰ و ۶۰ را بنویسید. ۱۴ و ۴۳ و ۴۷ و ۵۳ و ۵۹

۳- تعداد عدد های اول کمتر از ۲۰، هشت عدد است، تعداد عدد های مرکب کوچک تر از ۲۰ چند تاست؟ چرا؟ کل اعداد کوچکتر از ۲۵ برابر ۱۹ است لذا هشت عدد اول هستند، عدد بیش از ۲۰ هم

۴- آیا جمله زیر درست است؟ چرا؟ که نه اول است و نه مرکب. پس $15 = 19 - 8 - 1$ عدد مرکب داریم.

۵- مجموع دو عدد اول ۹۹ است. آن دو عدد را مشخص کنید و توضیح دهید که چگونه آنها را پیدا کردید. مجموع دو عدد زمانی فرد نشود که بیکار زوج و دیلوی غرد باشد. پس بیکار عدد ۲ و دیلوی ۹۷

۶- پنج عدد بنویسید که غیر از ۲ و ۳ شمارنده اول دیگری نداشته باشند. ۳۴، ۱۸، ۲۴، ۱۲، ۴

۷- عددی در نظر بگیرید که ۴ و ۹ دو شمارنده آن باشند. حال شش عدد دیگر پیدا کنید که شمارنده های عدد مورد نظر باشند (عدد مورد تفریق حراقل) دوبار

شمارنده ۲ و حراقل دوبار سه نزد ۳ تکرار شده، پس عدد مورد تفریق $3 \times 2 = 6$

حراقل به صورت $3^2 = 9$ است. سایر شمارنده های $3^3 = 27$ به صورت زیر است.

۳۴، ۱۸، ۱۲، ۴، ۳، ۲ و ۱

خواندنی

دو عدد اول که با هم دو واحد اختلاف دارند را یک جفت عدد اول دوقلو می نامند، مانند (۳، ۵) (۵، ۷)

یا (۱۱، ۱۳) یا (۱۰۱، ۱۰۳). ریاضیدانان براین باورند (حدس می زنند) که برای دوقلوهای اول پایانی وجود ندارد.

همچنین هر سه عدد فرد و متوالی را، که هر سه اول نیز باشند، اعداد اول سه قلو می نامند که فقط

یک سه قلوی اول در بین اعداد طبیعی وجود دارد؛ یعنی (۳، ۵، ۷) و سه قلوی دیگری یافت

نمی شود! چرا؟

فعالیت



می خواهیم عددهای اول از ۱ تا ۵۰ را تعیین کنیم.

ابتدا عددهای ۱ تا ۵۰ را می نویسیم.

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰
۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰

- حالا عددهای غیر اول را خط می زنیم تا عددهای اول باقی بمانند.

۱- آیا عدد ۱ را خط زدید؟ بله چرا؟ چون اول نیست

۲- آیا مضرب های عدد ۲ را خط می زنید؟ بله چرا؟ چون مضرب های ۲ بر ۲ بخش نمی‌رند

- مضرب های مرکب عدد ۲ را به صورت خط بزنید. پس مرکب آن‌د. بجز خود عدد ۲ که اول است

- مضرب های مرکب عدد ۳ را خط بزنید.

۳- آیا لازم است مضرب های عدد ۴ را خط بزنیم؟ خیر چرا؟ زیرا اگر عددی مضرب ۴ باشد، پیش از آن به عنوان مضرب ۲ خط خورده است.

۴- آیا مضرب های عدد ۵ را خط می زنید؟ بله چرا؟ چون مضرب های ۵ مرکب هستند

مضرب های مرکب عدد ۵ را خط بزنید. کوچک‌ترین مضرب عدد ۵، که برای اولین بار خط می خورد، کدام است؟

۲۵

۵- آیا مضرب های عدد ۶ را خط می زنید؟ خیر چرا؟ چون قبل از عنوان مضرب ۲ و ۳ خواهد بود.

۶- آیا مضرب های عدد ۷ را خط می زنید؟ بله چرا؟ چون مضرب های ۷ مرکب هستند و قبل از خط بخوردند.

۷- مضرب های مرکب عدد ۷ را خط بزنید. کوچک‌ترین مضرب عدد ۷، که برای اولین بار خط می خورد، کدام است؟

۴۹

۸- آیا مضرب های اعداد ۸ و ۹ و ۱۰ را خط می زنید؟ خیر چرا؟ چون قبل از عنوان

مضرب ۲ و ۳ و ۵ خواهد بود.

- ۹- اگر بخواهیم مضرب‌های عدد ۱۱ را خط بزنیم، کدام مضرب ۱۱ برای اولین بار خط خواهد خورد؟
 هیچ مفہومی از ۱۱ که قبلاً خط نخورده باشد، وجود ندارد.
- ۱۰- به این ترتیب، آیا لازم است مضرب‌های عدد ۱۱ را خط بزنیم؟ خیر

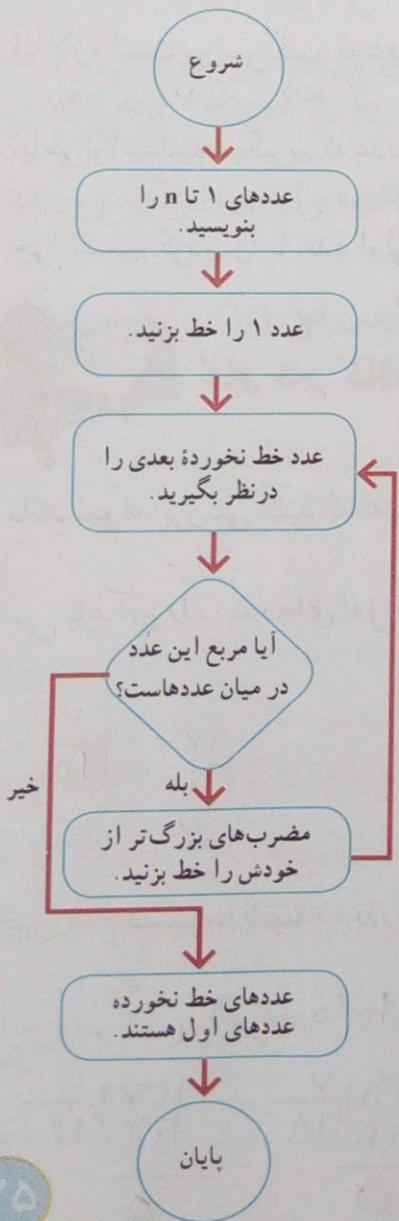
۱۱- آیا عده‌های باقیمانده، اول هستند؟ بله

برای تعیین عده‌های اول، عدد یک و مضرب‌های مرکب اعداد اول را خط می‌زنیم و خط زدن را تا عدد اولی ادامه می‌دهیم که مربع آن، بین عده‌های نوشته شده نباشد.

کار در کلاس



نتایج فعالیت قبل، که به آن **روش غربال** می‌گویند در نمودار زیر خلاصه شده است.



این نمودار را برای $n = 40$ دنبال کنید و همه مرحله‌ها را یک به یک انجام دهید. هر مرحله از نمودار را برای خود توضیح دهید؛ برای مثال، جمله «عده‌های ۱ تا n را بنویسید» را بخوانید و عده‌های ۱ تا 40 را در کادر زیر بنویسید. عدد ۱ را خط بزنید. عدد خط نخورده بعدی را، که عدد ۲ است در نظر بگیرید. آیا مربع عدد ۲ بین عده‌ها هست؟ مضرب‌های مرکب آن را خط بزنید. دوباره به مرحله قبلی برگردید و به همین ترتیب کار را ادامه دهید.



می خواهیم مشخص کنیم ۴۷ اول است یا نه. مانند روش غربال، که در صفحه قبل توضیح داده شد، فرض کنید عددهای ۱ تا ۴۷ نوشته شده اند.

$$\begin{array}{r} 47 \\ \times 2 \\ \hline 94 \end{array}$$

آیا عدد ۴۷ با مضرب های ۲ خط می خورد؟ خیر با انجام دادن چه عملی می توانید به این سؤال پاسخ دهید؟ باید ۴۷ را بر ۲ تقسیم کنیم. چون باقی مانده دارد پس ۴۷ مضرب ۲ نیست.

آیا عدد ۴۷ با مضرب های ۳ خط می خورد؟ خیر چرا؟ چون $47 \div 3 = 15 \text{ باقی } 2$ باقی مانده دارد.

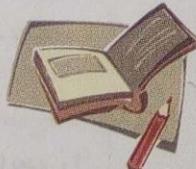
آیا عدد ۴۷ با مضرب های ۵ خط می خورد؟ خیر چرا؟ چون $47 \div 5 = 9 \text{ باقی } 2$ باقی مانده دارد.

آیا لازم است بررسی کنیم که عدد ۴۷ با مضرب های ۷ خط می خورد یا نه؟ خیر چرا؟ چون $47 \div 7 = 6 \text{ باقی } 5$ است.

آیا می توانیم نتیجه بگیریم که عدد ۴۷ را فقط بر عددهای اول تقسیم می کنیم؟ بله چرا؟ چون اگر عددی بر عدد اول بخشیده باشد بجز برخاسته بجز برخاسته باش (اعمال مرکب) بخشیده باشد نیست. چرا تقسیم کردن را تا عدد اولی که مربع آن از ۴۷ بزرگتر شود ادامه می دهیم؟ توضیح دهید.

چون در عرض غربال هنگام حذف مضرب های هر عدد اول، اولین

کار در کلاس مضربی که برای بار اول عطا می خورد، مربيع همان عدد



اول است.

مانند نمونه، بررسی کنید که عددهای داده شده (۹۷، ۱۳۱ و ۱۴۳) اول یا مرکب هستند.

$$\sqrt{97} = 9 \longrightarrow$$

پس باید آن را به عددهای اول ۵، ۳، ۲ و ۷ تقسیم کنیم.

$$\begin{array}{r} 97 \\ - 96 \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ \hline 48 \end{array} \quad \begin{array}{r} 97 \\ - 96 \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \\ \hline 32 \end{array} \quad \begin{array}{r} 97 \\ - 95 \\ \hline 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5 \\ \hline 19 \end{array} \quad \begin{array}{r} 97 \\ - 91 \\ \hline 6 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7 \\ \hline 13 \end{array}$$

چون تمام تقسیم ها باقیمانده دارند، ۹۷ مضرب هیچ کدام نیست؛ یعنی عددی اول است.

$$\sqrt{131} = 12 \longrightarrow \text{پس باید آن را بر عددهای اول ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱ تقسیم کنیم}$$

$$\begin{array}{r} 131 \\ - 120 \\ \hline 11 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ \hline 48 \end{array} \quad \begin{array}{r} 131 \\ - 129 \\ \hline 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 131 \\ - 130 \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 131 \\ - 124 \\ \hline 7 \end{array} \quad \begin{array}{r} 131 \\ - 124 \\ \hline 7 \end{array} \quad \begin{array}{r} 131 \\ - 124 \\ \hline 7 \end{array} \quad \begin{array}{r} 131 \\ - 124 \\ \hline 7 \end{array}$$

پس ۱۳۱ عددی اول است.

پس باشد آن را بر اعداد اول ۲، ۳، ۵ و ۷ تقسیم کنیم

$$\begin{array}{r} \sqrt{143} = 12 \\ \hline 143 \\ -144 \\ \hline -1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} \sqrt{143} = 13 \\ \hline 143 \\ -143 \\ \hline -0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} \sqrt{143} = 15 \\ \hline 143 \\ -140 \\ \hline -3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} \sqrt{143} = 17 \\ \hline 143 \\ -140 \\ \hline -3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} \sqrt{143} = 19 \\ \hline 143 \\ -140 \\ \hline -3 \\ \hline \end{array}$$

چون 143 بر 19 بزرگ است، پس عدد اول نیست



- ۱- از روش غربال برای عدههای ۱ تا ۶۰ استفاده و عدههای اول کمتر از 60 را پیدا کنید. $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59$
- ۲- مشخص کنید که عدههای 7 و 11 اول اند یا مرکب. $11 \leftarrow$ عدد اول $7 \leftarrow$ عدد اول
- ۳- «برای اینکه بفهمیم عدههای کمتر از 100 اول اند یا نه، کافی است آنها را به عدههای $2, 3, 5, 7$ تقسیم کنیم.» درست است. چون مربع عد 11 برابر 121 هست و شود یعنی برای تقسیم اول بودن آیا این جمله درست است؟ چرا؟ اعداد کمتر از 121 بررسی بخش بزرگی بر 11 به بعد سازی نیست.
- ۴- عددی از 120 کوچک تر و از 100 بزرگ تر است. برای اینکه بفهمیم این عدد اول است یا نه، حداقل چند تقسیم انجام می دهیم؟ چرا؟ حداقل همان تقسیم. بر $2, 3, 5$ و 7 چون $11 \times 11 = 121$
- ۵- عدههای ۱ تا 100 را بنویسید و غربال کنید؛ سپس به سوالات زیر پاسخ دهید.
- اولین عددی که خط خورد. عدد یک است.
 - در مرحله حذف مضربهای 7 ، اولین مضرب 7 که به عنوان مضربهای سایر عدهها خط نخورد 49 .
 - عددی که با مضربهای آن عدد 24 خط خورد. عدد 2 و 3 .
 - تمام مضربهای 5 که در مرحله حذف مضربهای 5 برای اولین بار خط خوردن.

$$95 - 85 - 75 - 55 - 35 - 25$$

خواندنی

توزیع و نوع قرار گرفتن اعداد اول بین اعداد طبیعی بسیار نامنظم است و از قانون خاصی پیروی نمی کند ولی همین اعداد اول که به صورتی نامنظم در بین اعداد طبیعی روییده اند، می توانند هر عدد طبیعی و بزرگ تر از یک را بسازند و به عنوان بلوک های ساختمنی برای اعداد طبیعی به کار بروند.

$$36 = 2^2 \times 3^2 \quad , \quad 100 = 2^2 \times 5^2$$

$$27 = 3^3 \quad , \quad 5 = 5^1 \quad , \quad 12 = 2^2 \times 3$$

مرور فصل ۲

ماهیم و مهارت‌ها

اصطلاحات زیر در این فصل به کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود، آنها را توصیف کنید و برای هر کدام مثالی بزنید.

- نمودار درختی
- عدد مرکب
- نسبت به هم اول
- روش غربال
- روش‌های اصلی زیر در این فصل مطرح شده‌اند. با یک مثال هر کدام را توضیح دهید و خلاصه درس را در دفتر خود بنویسید.
- پیدا کردن عددهای اول با روش‌های تقسیم، ضرب و بخش‌پذیری
- تشخیص عددهای اول و مرکب
- تعیین عددهای اول به کمک روش غربال
- دنبال کردن یک دستورالعمل و نمودار
- تعیین اینکه یک عدد، اول یا مرکب است.

کاربرد

این درس در فصل مربوط به توان و جذر کاربرد دارد. از تبدیل پایه‌های مرکب به پایه‌های عدد اول برای ساده کردن عبارت‌های توان دار استفاده می‌شود.

تمرین‌های ترکیبی

۱- یک عدد مرکب بنویسید که شمارنده‌های اول غیر از ۲ و ۳ نداشته باشد. آیا این عدد و عددی که شمارنده‌های اول آن ۲ و ۵ است، نسبت به هم اول‌اند؟ چرا؟

۲- با روش غربال، عددهای اول بین 2^0 و 4^0 را پیدا کنید. در این روش، کار را از خط زدن مضرب‌های کدام عدد شروع می‌کنید و با مضرب‌های کدام عدد پایان می‌دهید؟

۳- آیا عدد ۱۳۷ اول است؟ چرا؟

۴- ۲ عدد مرکب بنویسید که نسبت به هم اول باشند.